შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

მოც.: $f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$ ვ.დ. რომ $f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z)$.

$$f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$$
$$f(y)+f(z) \geq 2f(y+z)$$
$$f(z)+f(x) \geq 2f(x+z)$$

შევკრიბოთ ეს უტოლობები:

$$2f(x)+2f(y)+2f(z) \geq 2f(x+y)+2f(y+z)+2f(x+z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)+f(y)+f(z) \geq f(x+y)+f(y+z)+f(x+z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(f(x)+f(y)+f(z)) \geq f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)+f(x)+f(y)+f(z) =$$
$$= f(x+y)+f(z)+f(y+z)+f(x)+f(x+z)+f(y) \geq 2f(x+y+z)+2f(y+z+x)+2f(x+z+y).$$

მივიღეთ რომ:

$$2f(x)+2f(y)+2f(z) \geq 2f(x+y+z)+2f(x+y+z)+2f(x+y+z) = 6f(x+y+z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z).$$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

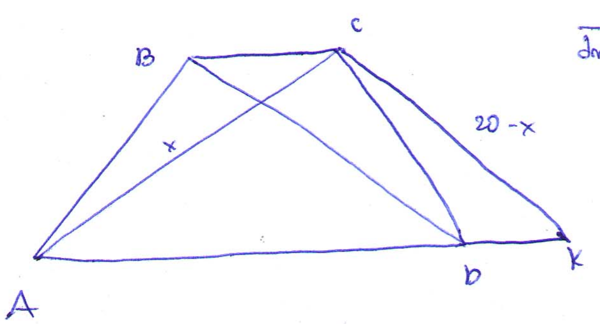
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



?	მოც.:
	$S_{ABCD}=50$
	$AC+BD=20$

$AC \equiv x \Rightarrow BD=20-x$

გავავლოთ C-დან BD-ს პარალელური წრფე AD-ს გაგრძელებამდე და გადაკვეთის წერტილს დავარქვათ K.

ცხადია რომ BCKD არის პარალელოგრამი $\Rightarrow BD=CK=20-x$.

როგორც ვიცით ABCD ტრაპეციის ფართობი ACK სამკუთხედის ფართობის ტოლია. $\angle ACK=\alpha$.

$S_{ABCD}=50 = S_{\triangle ACK}=\frac{1}{2}\cdot x(20-x)\cdot\sin\alpha$

როგორც ვიცით $\sin\alpha\le 1$ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

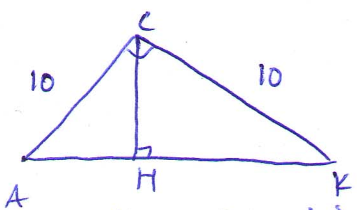
$50=\frac{1}{2}\cdot x(20-x)\cdot\sin\alpha \le \frac{1}{2}x(20-x)$.

ამოვხსნათ მიღებული უტოლობა:

$50\le\frac{1}{2}x(20-x) \iff 100\le x(20-x) \iff x^2-20x+100\le 0 \iff (x-10)^2\le 0$

ამ უტოლობას ცხადია რომ ამონახსნი აქვს როცა $x=10$.

თუ $x=10 \Rightarrow \alpha=90^\circ$.



ცხადია რომ ABCD ~~სად~~ ტრაპეციის სიმაღლე ACK სამკუთხედში CH სიმაღლის ტოლი ამიტომ ~~გავეცნოთ~~ გამოვთვალოთ CH.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

$AK^2 = AC^2 + CK^2 = 10^2 + 10^2 = 2 \cdot 10^2 \Rightarrow AK = 10\sqrt{2}.$

$S_{ACK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot CH = \cancel{\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot CH = 50}\ \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot CH = 50 \Rightarrow CH = 5\sqrt{2}.$

პასუხი: ამ სამკუთხედის სიმაღლე $5\sqrt{2}$-ის ტოლია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ცხადია რომ თუ $a+b+c \vdots c \Rightarrow a+b \vdots c$-ზე.

განვიხილოთ ისეთი მარტივი p, რომელზედაც იყოფა a-ც; b-ც და c-ც.

~~მაშინ პირობით~~ ვთქვათ $a=pa_1$; $b=pb_1$; $c=pc_1$;

$pa_1+pb_1 \vdots pc_1 \Rightarrow a_1+b_1 \vdots c_1$

$pb_1+pc_1 \vdots pa_1 \Rightarrow b_1+c_1 \vdots a_1$

$pa_1+pc_1 \vdots pb_1 \Rightarrow a_1+c_1 \vdots b_1$

ანუ თუ ჩვენ ვიპოვით ისეთ სამეულს $(a;b;c)$ რომლისთვისაც $p=1$ მაშინ ~~ჩვენ ქვე~~ ამონახსნი იქნება $(qa;qb;qc)$ სადაც თითოეული qa; qb და $qc < 2011$-ზე.

დავამტკიცოთ რომ თუ ~~... ...~~ a-ს და b-ს უ.ს.გ არის t მაშინ ის c-ს გამყოფიც იქნება:

$\cancel{ta_2+tb_2}$ $ta_2+c \vdots tb_2 \Rightarrow ta_2+c \vdots t \Rightarrow c \vdots t$-ზე.

ვაჩვენოთ რომ ჩვენ უნდა მოვძებნოთ ისეთი $(a;b;c)$ სამეული რომლისთვისაც
უ.ს.გ$(a;b)=1$ უსგ$(b;c)=1$ და უ.ს.გ$(a;c)=1$.

არ განვიხილოთ ის შემთხვევა როცა ~~ან b და ან c~~ $(a;b;c)$ სამეულის რომელიმე 1-ის ტოლია.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=cx \\ b+c=ay \\ \cancel{a+c=bz} \end{array}\right\} \Rightarrow c-a=ay-cx \Rightarrow c(x+1)=a(y+1).$$

~~უ.ს.გ$(a+b;b+c)=$ უ.ს.გ$(cx;ay)$~~ ცხადია რომ ~~$x\ y\ z$~~ $x\neq 0$; $y\neq 0$ $z\neq 0$.

$1=$ უ.ს.გ$(a;c)=$ უ.ს.გ$(a+b;b+c)=$ უ.ს.გ$(cx;ay)=$ უ.ს.გ$(x;y)$. $=$ უ.ს.გ$(x+1;y+1)$.

მივიღეთ რომ უსგ$(x+1;y+1)=1 \Rightarrow$ და უ.ს.გ$(c;a)=1 \Rightarrow x+1=a$ და $y+1=c$ ~~თუ ...~~

$$\left.\begin{array}{l} b+c=ay \\ a+c=bz \end{array}\right\} \Rightarrow a(y+1)=b(z+1)$$ ზუსტად ანალოგიური მსჯელობით $y+1=b$ და $z+1=a$.

$$\left.\begin{array}{l} a+c=bz \\ a+b=cx \end{array}\right\} \Rightarrow c(x+1)=b(z+1) \Rightarrow x+1=b$$ და $z+1=c$

მივიღეთ რომ $a=b=c$ სადაც ~~უ.ს.გ$(a;b;c)=1$~~ უ.ს.გ$(a;b)=$ უ.ს.გ$(b;c)=$ უ.ს.გ$(a;c)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b=c$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

თუ სამეული $a; b;$ და c სიმეტრიულია სამ წყვილ. ~~ამის~~ ზოგადობის შეუზღუდავად $c=1$.

მაშინ მივიღებთ რომ $a=(b+1)x$ ხოლო $b=(a+1)y$

ამ სისტემის ამონახსნი მიიღება მხოლოდ 3 (დაყვანამდე) სახის არის $(1;1;1)$ $(1;2;1)$ და $(1;2;3)$

ცხადია რომ სამეული $(1;1;1)$-დან მივიღოთ მივიღებთ ნებისმიერი სამეული $(k;k;k)$ სადაც $k<2011$, ასეთი სამეულების რაოდენობა ცხადია არის 2010.

$(1;2;1)$-დან მივიღოთ მივიღებთ $(u;u;2u)$ სადაც $u\le 1005$ ასეთი სამეულების რაოდენობა დადებითი იქნება 1005 ხოლო თითოეულისთვის დასაშვების 3 ვარიანტი არსებობს ჯამში $(u;u;2u)$ სახის სამეულები იქნება $3\cdot 1005$.

$(1;2;3)$-დან მივიღებთ მივიღოთ $(d;2d;3d)$ სადაც $d\le 670$ ასეთი სამეულების რაოდენობა დადებითი იქნება 670 ხოლო დასაშვებისთვის ცხადია რომ იქნება $6\cdot 670$.

მივიღეთ რომ ასეთი $(a;b;c)$ სამეულების რაოდენობა იქნება $2010+3\cdot 1005+6\cdot 670=2010+3\cdot\frac{2010}{2}+$
$+6\cdot\frac{2010}{3}=2010\left(1+\frac{3}{2}+2\right)=2010\cdot\frac{1}{2}\cdot 9=1005\cdot 9=9045$.

პასუხი: ასეთი სამეულების რაოდენობაა 9045.